Univerzita Karlova v Praze
Matematicko – fyzikální fakulta

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

*Ondřej Žára*

# KVADRATURNÍ FORMULE A FUNKCE EXPONENCIÁLNÍHO TYPU

*Katedra numerické matematiky*
Vedoucí diplomové práce: *Doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.*
Studijní program: *Výpočtová matematika*

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 9. dubna 2007

Ondřej Žára

Chtěl bych poděkovat vedoucímu diplomové práce, doc. RNDr. Josefu Kofroňovi, CSc., za poskytnuté studijní materiály, rady, podnětné připomínky a věnovaný čas.

# Obsah

Název práce: *Kvadraturní formule a funkce exponenciálního typu*
Autor: *Ondřej Žára*
Katedra: *Katedra numerické matematiky*
Vedoucí diplomové práce: *Doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.*
e-mail vedoucího: *Josef.Kofron@mff.cuni.cz*

Abstrakt: *Diplomová práce je zaměřena na studium funkcí exponenciálního typu ve vztahu k aplikacím na kvadraturní formule. K tématu existuje několik článků, zabývajících se různými kvadraturními formulemi a jejich vlastnostmi na třídě celistvých funkcí a funkcí exponenciálního typu; tato práce je shrnuje, doplňuje jejich neúplné či chybějící důkazy a doprovází výklad několika příklady.*
*Přestože nebylo dosaženo žádných nových fundamentálních výsledků, nejde jen o prostý překlad článků - práce obsahuje vlastní důkazy, příklady, komentáře a vysvětlující popisy.*

Klíčová slova: *holomorfní funkce, celistvé funkce, funkce exponenciálního typu, kvadratura, lichoběžníkové pravidlo, typ, řád*

Title: *Quadrature formulae and functions of exponential type*
Author: *Ondřej Žára*
Department: *Department of Numerical Mathematics*
Supervisor: *Doc. RNDr. Josef Kofroň, CSc.*
Supervisor's email address: *Josef.Kofron@mff.cuni.cz*

Abstract: *Master thesis focuses on analysis of entire functions of exponential type, ephasizing their applications to quadrature formulae. Several articles describing quadrature formulae of entire functions and functions of exponential type are available; this work aims to sum and consolidate their results, fill in missing or incomplete proofs and accompany formulae by examples.*
*Although no new fundamental results were achieved, this work contains far more than just article translations - author's own proofs, examples, comments and explanations are included.*

Keywords: *holomorphic functions, entire functions, functions of exponential type, quadrature, trapezoidal rule, type, order*

# 1 Úvod

K problematice kvadratury celistvých funkcí, potažmo pak funkcí exponenciálního typu, je dostupná řada článků (zejména [1], [2], [8], [10] a [11]). Bohužel, jejich obsah je poměrně strohý, prostý zevrubnějších důkazů a příkladů. Tato práce si klade za cíl zmíněnou problematiku sjednotit, detailněji popsat a přiblížit tak méně zainteresovanému čtenáři.

Do práce bohužel nemohl být zahrnut článek [11], neboť většina jeho pramenů je nedostupná. Zároveň se nepodařilo kontaktovat profesora Q. I. Rahmana, který by - jako autor článku - mohl poskytnout detailnější informace.

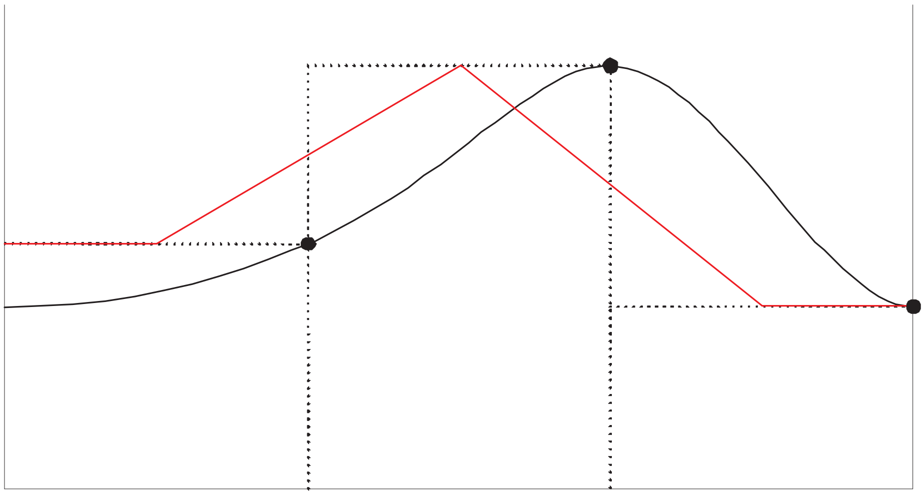
Těžiště práce se tak mírně posouvá: důraz je kladen i na širší množinu celistvých funkcí a jejich kvadraturu, zatímco funkcím exponenciálního typu jsou vyhrazeny části 2.4, 3 a 4.

# 2 Periodické funkce a lichoběžníkové pravidlo

Výsledky této části jsou založeny především na [1] a [2].

**Definice.** Označme $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ jako množinu všech spojitých $2\pi$-periodických funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Pro funkce $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ definujme **n-bodové lichoběžníkové pravidlo**:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right) + R_n[f] \tag{1}$$



Obrázek 1: Trojbodové lichoběžníkové pravidlo

Na Obrázku 1 vidíme lichoběžníkové pravidlo pro případ $n = 3$: černá kolečka představují funkční hodnoty $\left[f\left(\frac{2\pi\nu}{3}\right)\right]_{\nu=1}^{3}$, tečkované obdélníky odpovídají plochám $\frac{2\pi}{3} \cdot f\left(\frac{2\pi\nu}{3}\right)$. Součet ploch těchto obdélníků je stejný jako plocha pod červenou čarou; když ji (s periodickým prodloužením) posuneme doprava o $n/6$, snadno nahlédneme, že jde opravdu o lichoběžníky.

V této části práce se budeme zabývat tím, jak se chová zbytek $R_n[f]$ pro různé typy funkcí.

## 2.1 Trigonometrické polynomy

**Lemma 2.1.1.** *Nechť $\mathscr{T}_k$ značí prostor všech trigonometrických polynomů stupně nejvýše $k$. Pak pro všechna $f \in \mathscr{T}_k$ platí*

$$R_n[f] = 0 \ \ pro\ všechna\ n > k\ \ . \tag{2}$$

*Důkaz.* Nechť $f(x) = \sum_{l=0}^{k} e^{ilx}$, $k < n$. Levá strana lichoběžníkového pravidla je rovna $2\pi$; chceme ukázat, že $2\pi = \frac{2\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{n} f\left(\frac{2\pi\nu}{n}\right)$ , neboli

$$n = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=0}^{k} \exp\left(2\pi i \frac{l\nu}{n}\right).$$

Pravou stranu můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\exp\left(2\pi i \frac{l}{n}\right)\right)^{\nu} &= \sum_{l=0}^{k} \left[\sum_{\nu=0}^{n} \left(\exp\left(2\pi i \frac{l}{n}\right)\right)^{\nu} - 1\right] = \\ &= \sum_{l=0}^{k} \left[\sum_{\nu=0}^{n} \omega_n(l)^{\nu} - 1\right], \end{aligned}$$

kde $\omega_n(l) := e^{\left(2\pi i \frac{l}{n}\right)}$. Pro $l = 1, \ldots, n$ nabývá $\omega_n(l)$ všech hodnot $n$-té odmocniny komplexní jednotky.

Vzorec pro částečný součet geometrické řady dává

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \omega_n(l)^{\nu} = \frac{\omega_n(l)^n - 1}{\omega_n(l) - 1},$$

což je 0; jmenovatel naopak nikdy roven nule není, protože $l < n$ a tedy $\omega_n(l) \neq 1$.

Všimneme si, že

$$\sum_{l=1}^{k} \left[\sum_{\nu=0}^{n} \omega_n(l)^{\nu} - 1\right] = \sum_{l=1}^{k} [\omega_n(l)^n - 1] = k * (1 - 1) = 0;$$

pro zbývající člen $l = 0$ platí

$$\sum_{\nu=0}^{n} \omega_n(0)^{\nu} - 1 = (n + 1) * 1 - 1 = n,$$

což je hledaná část pravé strany lichoběžníkového pravidla. $\square$

Vlastnost (2) však prostor $\mathscr{T}_k$ necharakterizuje, neboť (2) platí i pro jiné funkce, například všechny $f$ liché na intervalu $[0, 2\pi]$ (tj. $f(x) \equiv -f(2\pi - x)$). Dokonce je možné ukázat (viz [21], [22] a [23]), že pro

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{inx},$$

kde $\mu$ je Möbiova funkce[1], platí $R_n[g] = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, přestože $g + c$ není na intervalu $[0, 2\pi]$ lichá pro žádnou konstantu $c$.

Pro využití zbytku lichoběžníkového pravidla je třeba uvážit posuny funkce $f$:

$$f_h : x \mapsto f(x + h), \quad h \in \mathbb{R},$$

jejichž zbytek $R_n[f_h]$ lze odhadnout s využitím Fejérovy věty.

**Lemma 2.1.2** (Vlastnosti Fejérova jádra)**.** *Fejérovo jádro*

$$K_n(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x)\,,$$

*kde*

$$D_k(x) := \frac{1}{2} \sum_{j=-k}^{k} e^{ijx}$$

*je Dirichletovo jádro, má tyto vlastnosti:*

*(i)* $K_n(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikx}\,,$

*(ii)* $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\; dx = 1\,,$

*(iii)* $0 \le K_n(x) \le \dfrac{\pi^2}{(n+1)x^2}$ *pro* $0 < x \le \pi\,.$

---

[1]definice převzata z [3]: $\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{pro } n \equiv 1 \\ (-1)^k & \text{pokud } n \text{ je součin } k \text{ navzájem různých prvočísel} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

*Důkaz.*
(i): Z definice Dirichletova jádra je

$$\begin{aligned}(n+1)K_n(x)) &= \sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \sum_{j=-k}^{k} e^{ijx} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|)e^{ikx} \,.\end{aligned}$$

(ii): Je

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \,\mathrm{d}x = \pi \,,$$

neboť pro nenulové $k$ se integrály odpovídající hodnotám $\pm k$ odečtou. Tedy

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) \,\mathrm{d}x = 1$$

a proto i

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) \,\mathrm{d}x = 1 \,.$$

(iii): Dle [14] je

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \left( \frac{\sin(x(n+1)/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 \,,$$

tedy

$$0 \le K_n(x) \le \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sin^2(x/2)} \,.$$

Víme, že pro $0 < x \le \pi$ je $t/\pi \le \sin(t/2)$, takže

$$K_n(x) \le \frac{1}{n+1} \frac{\pi^2}{x^2} \,.$$

□

**Věta 2.1.3** (Fejér)**.** *Nechť* $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$*. Pokud*

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt, \; k \in \mathbb{Z} \,,$$

*pak*

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} \left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right) \hat{f}(k)e^{ikx} \tag{3}$$

*pro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

*Důkaz.* Definujme nejprve

$$\sigma_n(f,x) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)K_n(t-x)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $K_n(x)$ je $n$-té Fejérovo jádro. Ukážeme, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,x) = f(x)\,.$$

Je

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)K_n(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

využijeme Lemmatu (2.1.2), vlastnosti (ii):

$$\begin{aligned} \sigma_n(f,x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f(x)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t)[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Výraz v hranaté závorce označme $\Phi(x,t)$. Pro $0 < \delta < \pi$ máme

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| \le \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\delta} |\Phi(x,t)|K_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\delta}^{\pi} |\Phi(x,t)|K_n(t)\,\mathrm{d}t \right). \tag{4}$$

Pro odhad prvního integrálu v (4) použijeme následující:

$$|\Phi(x,t)| \le |f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|\,,$$

tedy pro libovolné $\varepsilon > 0$ můžeme volit $0 < \delta < \pi$ tak, aby pro všechna $t$, $0 < t < \delta$ platilo

$$|\Phi(x,y)| \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Potom lze odhadnout

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta |\Phi(x,t)|K_n(t)\ \mathrm{d}t &\le \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\varepsilon}{2}K_n(t)\ \mathrm{d}t\\ &< \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\ \mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}\,,\end{aligned}$$

neboť $K_n(t) \ge 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Pro odhad druhého integrálu v (4) využijme Lemmatu (2.1.2), vlastnosti (iii):

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi |\Phi(x,t)|K_n(t)\ \mathrm{d}t &\le \frac{1}{\pi}|\Phi(x,t)|\frac{\pi^2}{(n+1)x^2}\ \mathrm{d}t\\ &\le \frac{\pi^2}{(n+1)x^2}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|}{t^2}\ \mathrm{d}t\\ &\le \frac{\pi^2}{(n+1)x^2}\frac{2}{\delta^2}(\|f\|_1+\pi|f(x)|)\,.\end{aligned}$$

Tento člen jde pro $n \to \infty$ k nule, tedy $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f,x) = f(x)$. Nakonec pomocí Lemmatu (2.1.2), vlastnosti (i):

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}\,,$$

tedy

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)K_n(x-t)\ \mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ik(x-t)}\ \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}e^{-ikt}\ \mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\ \mathrm{d}t\, e^{ikx}\\ &= \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)e^{ikx}\,.\end{aligned}$$

□

**Lemma 2.1.4.** *Nechť $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ . Pak pro všechna $h \in \mathbb{R}$ platí*

$$R_n[f_h] = \lim_{m\to\infty} -2\pi \sum_{|j|\le\lfloor m/n\rfloor}^{*} \left(1 - \frac{|jn|}{m+1}\right) \hat{f}(jn)e^{ijnh}. \tag{5}$$

Suma s hvězdičkou značí takový součet, ve kterém vynecháme sčítanec odpovídající indexu rovnému 0. Dále standardně $\lfloor x\rfloor$ značí zaokrouhlení na celá čísla dolů.

*Důkaz.* Dle předchozího lemmatu je

$$f_h(x) = f(x+h) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} \left(1 + \frac{|k|}{m+1}\right) \hat{f}(k)e^{ik(x+h)}$$

pro všechna $x, h \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\begin{aligned} R_n[f_h] &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} \left(1 + \frac{|k|}{m+1}\right) \hat{f}(k) \\ &\quad\times \left[\int_0^{2\pi} e^{ik\ (x+h)}\,\mathrm{d}x - \frac{2\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{ik\ (h+2\pi\nu/n)}\right] = \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=-m}^{m} \left(1 + \frac{|k|}{m+1}\right) \hat{f}(k) \\ &\quad\times \left[\int_0^{2\pi} e^{ik\ (x+h)}\,\mathrm{d}x - \frac{2\pi}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{ik\ h}e^{ik\ 2\pi\nu/n}\right]. \end{aligned}$$

Pro $k = 0$ je $\int_0^{2\pi} e^{ik(x+h)}\,\mathrm{d}x = 2\pi$, v ostatních případech 0. Dále pro ta $k$, která nejsou násobkem $n$, je $\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} e^{ik2\pi\nu/n} = 0$, v ostatních případech 1. Suma přes $k$ má tedy nenulové sčítance jen pro $k = jn$, $0 \ne j \in \mathbb{N}$ a platí (5).

□

Nyní již můžeme přistoupit k hlavnímu výsledku, týkajícího se trigonometrických polynomů.

**Věta 2.1.5.** *Nechť $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Pak $f \in \mathscr{T}_k$ tehdy a jen tedy, pokud $R_n[f_h] =$ 0 pro všechna $n > k$ a $|h| \le \pi/n$.*

*Důkaz.* První implikace: pokud $f \in \mathscr{T}_k$, pak $f_h \in \mathscr{T}_k$ pro všechna $h \in \mathbb{R}$ a tedy $R_n[f_h] = 0$ pro všechna $n > k$, viz Lemma 2.1.1.
Druhá implikace: předpokládejme, že $R_n[f_h] = 0$ pro všechna $n > k$ a $|h| \leq \pi/2$. Pak pro dané $\varepsilon > 0$ a $n > k$ existuje dle Lemmatu 2.1.4 nějaké $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left| 2\pi \sum_{|j| \leq \lfloor m/n \rfloor}^{*} \left(1 - \frac{|jn|}{m+1}\right) \hat{f}(jn) e^{ijnh} \right| < \varepsilon$$

pro všechna $m \geq m_0$ a $|h| \leq \pi/2$. Tedy pro trigonometrický polynom

$$t(\theta) := 2\pi \sum_{|j| \leq \lfloor m/n \rfloor}^{*} \left(1 - \frac{|jn|}{m+1}\right) \hat{f}(jn) e^{ij\theta} \tag{6}$$

platí $|t(\theta)| \leq \varepsilon$ pro všchna $\theta \in \mathbb{R}$, pokud $m \geq m_0$. Především tedy

$$\left| 2\pi \left(1 - \frac{n}{m+1}\right) \hat{f}(\pm n) \right| < \varepsilon \text{ pro } m \geq m_0,\, n > k,$$

z čehož plyne $f \in \mathscr{T}_k$. $\square$

## 2.2 Funkce z $B^2_{2\pi,d}$

**Definice.** Označme $B^2_{2\pi,d}$ množinu všech $2\pi$-periodických funkcí $f$, holomorfních v

$$S_d := \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| < d\},$$

které splňují

$$\|f\| := \sup_{|y|<d} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+iy)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} < +\infty. \tag{7}$$

Dále označme $l^2$ Hilbertův prostor posloupností $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, splňujících

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty\,.$$

**Lemma 2.2.1.** *Funkce $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ je restrikcí do $\mathbb{R}$ nějaké funkce patřící do $B^2_{2\pi,d}$ tehdy a jen tehdy, pokud $\hat{f}(n) = a_n e^{-|n|d}$ kde $(a_{\pm n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$.*

*Důkaz.* Nejprve nechť $f \in B^2_{2\pi,d}$. Pak definujme

$$\alpha_n(y) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+iy) e^{-inx} \, \mathrm{d}x \text{ pro } n \in \mathbb{Z}.$$

Když zintegrujeme funkci $f(z)e^{-inz}$ podél obdélníku s vrcholy $0, 2\pi, iy$ a $2\pi + iy$, kde $|y| < d$ a $ny < 0$, dostaneme 0 (Cauchyova věta), z čehož plyne, že

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+iy) e^{-in(x+iy)} \, \mathrm{d}x = e^{-|ny|} \alpha_n(y), \end{aligned}$$

neboť hodnoty integrálů podél svislých přímek se navzájem vynulují (jako důsledek předpokládané $2\pi$-periodicity). Použijme nyní (7) a Besselovu nerovnost:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 e^{-2|ny|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n(y)|^2 \le \|f\|^2 \text{ pro } y \in (-d, d).$$

Tedy, volbou $a_n := \hat{f}(n)e^{|n|d}$, dostáváme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 e^{-2|n|(d-|y|)} \leq \|f\|^2 \text{ pro } y \in (-d,d),$$

což implikuje $\sum_{z\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \|f\|^2$.

Nyní naopak nechť $\hat{f}(n) = a_n e^{-|n|d}$, kde $(a_{\pm n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. Pak funkce $f$ má absolutně konvergentní Fourierovu řadu a lze ji rozšířit do $S_d$ holomorfní funkcí

$$f(x+iy) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{in(x+iy)},$$

která splňuje Parsevalovu rovnost:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+iy)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)e^{-ny}|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2|n|(d-|y|)}$$

pro všechna $y \in (-d,d)$. Tedy $\|f\| < \infty$ a $f \in B^2_{2\pi,d}$ . □

**Věta 2.2.2.** *Nechť $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i) $f$ je restrikcí do $\mathbb{R}$ nějaké funkce patřící do $B^2_{2\pi,d}$ ,*

*(ii) $|R_n[f_h]| \leq b_n e^{-nd}$ pro všchna $n \in \mathbb{N}$ a $|h| \leq \pi/n$, kde $d$ je kladné a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$.*

*Důkaz.* Nejprve nechť $f \in B^2_{2\pi,d}$. Dle Lemmatu 2.2.1 je $\hat{f} = a_n e^{-|n|d}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$. Tedy s pomocí Lemmatu 2.1.4 dostáváme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $h \in \mathbb{R}$:

$$|R_n[f_h]| \leq 2\pi \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} |a_{jn}|e^{-n|j|d} =: b_n e^{-nd}.$$

Chceme ukázat, že $b_n \in l^2$. Je

$$b_n = 2\pi \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} |a_{jn}|e^{-nd(|j|-1)} = 2\pi \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} \left[|a_{jn}|e^{-nd(|j|-1)/2}e^{-nd(|j|-1)/2}\right],$$

dle Cauchy-Schwarzovy nerovnosti platí

$$
\begin{aligned}
|b_n|^2 &\le 4\pi^2 \left[ \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} |a_{jn}|^2 e^{-nd(|j|-1)} \right] \left[ \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} e^{-nd(|j|-1)} \right] \le \\
&\le 4\pi^2 \left[ \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} |a_{jn}|^2 e^{-nd(|j|-1)} \right] \left[ 2\sum_{j=0}^{\infty} \left(e^{-d}\right)^{nj} \right] \le \\
&\le \frac{8\pi^2}{1-e^{-d}} \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} |a_{jn}|^2 e^{-nd(|j|-1)} ,
\end{aligned}
$$

kde součet $\sum_{j=0}^{\infty}(e^{-d})^{nj}$ jsme odhadli součtem celé řady $\frac{1}{1-e^{-d}}$, a tedy pro všechna $N \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 &\le \frac{8\pi^2}{1-e^{-d}} \sum_{m\in\mathbb{Z}}^{*} |a_m|^2 \sum_{\nu=0}^{|m|-1} e^{-\nu d} \\
&\le \frac{8\pi^2}{\left(1-e^{-d}\right)^2} \sum_{m\in\mathbb{Z}}^{*} |a_m|^2 ,
\end{aligned}
$$

tedy (i) implikuje (ii).

Předpokládejme nyní naopak, že (ii) platí. Nechť $n$ je libovolné pevně zvolené přirozené číslo; dle Lemmatu 2.1.4 existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m \ge m_0$ platí

$$
\left| 2\pi \sum_{|j|\le\lfloor m/n\rfloor}^{*} \left(1 - \frac{|jn|}{m+1}\right) \hat{f}(jn) e^{ijnh} \right| \le \left(b_n + \frac{1}{n}\right) e^{-nd} .
$$

Pravá strana nerovnosti tak omezuje koeficienty trigonometrického polynomu (6); především

$$
\left| 2\pi \left(1 - \frac{n}{m+1}\right) \hat{f}(\pm n) \right| \le \left(b_n + \frac{1}{n}\right) e^{-nd}
$$

pro všechna $m \ge m_0$, tedy

$$
|\hat{f}(\pm n)| \le \frac{1}{2\pi} \left(b_n + \frac{1}{n}\right) e^{-nd} .
$$

S pomocí Lemmatu 2.2.1 konečně dostáváme, že $f$ je restrikcí do $\mathbb{R}$ nějaké funkce z $B^2_{2\pi,d}$. □

## 2.3 Sobolevovy prostory

**Definice.** Označme $W^k_{L^2}$ (Sobolevův) prostor funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ s periodou $2\pi$, pro které existuje $f^{(k-1)}$ a je absolutně spojitá a $f^{(k)} \in L^2(0, 2\pi)$ .

**Věta 2.3.1.** *Nechť $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

*(i) $f \in W^k_{L^2}$ pro nějaké přirozené $k \geq 2$ ,*

*(ii) $|R_n[f_h]| \leq b_n n^{-k}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $|h| \leq \pi/n$ , kde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$*

*Důkaz.* Dle [4, Věta 4.1.10] je tvrzení (i) ekvivalentní tvrzení

(i*) $\hat{f}(n) = (in)^{-k} c_n$ pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, kde $(c_{\pm n})_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ .

Tedy dle Lemmatu 2.1.4 je

$$|R_n[f_h]| \leq 2\pi \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} \frac{|c_{jn}|}{|jn|^k} := b_n n^{-k}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $h \in \mathbb{R}$. Pro $k \geq 2$ a $M_k := \sum j \in \mathbb{N} j^{-k}$ dostaneme z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

$$|b_n|^2 \leq 8\pi^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}}^{*} |j|^{-k} |c_{jn}|^2 \text{ pro } n \in \mathbb{N} .$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \leq 8\pi^2 M_k \sum_{m\in\mathbb{Z}}^{*} |c_m|^2 \sum_{j=1}^{m} j^{-k} \leq 8\pi^2 M_k^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m|^2$$

a z toho plyne (ii).

Nyní nechť (ii) platí. Ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje dle Lemmatu 2.1.4 nějaké $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left| 2\pi \sum_{|j|\leq\lfloor m/n\rfloor}^{*} \left(1 - \frac{jn}{m+1}\right) \hat{f}(jn) e^{ijnh} \right| \leq \left(b_n + \frac{1}{n}\right) n^{-k}$$

pro všechna $m > m_0$ a $|h| \leq \pi/2$. Uvážíme-li opět, stejně jako v důkazu Věty 2.2.2, polynom (6), dospějeme k platnosti (i*), což implikuje platnost (i). $\square$

## 2.4 Odhady založené na řádu a typu

V této části budou odvozeny některé odhady zbytku lichoběžníkového pravidla, závisející na řádu a typu funkce. Těchto nerovností lze prakticky využít, jak je v závěru části ukázáno.

Funkce, které jsou holomorfní v celé komplexní rovině, nazýváme *celistvé*. Celistvé funkce bývá ve zvyku charakterizovat pomocí jejich řádu a typu; definujeme je (stejně jako v [5]) následujícím způsobem. Označme

$$M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Pak

$$\rho := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M_f(r)}{\log r}$$

nazýváme *řádem* funkce $f$. Pro funkci řádu $\rho \in (0,\infty)$ definujeme její *typ* jako

$$T := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_f(r)}{r^\rho}.$$

Pro některé následující odhady je užitečné definovat také s-řád a s-typ. Předpokládejme, že celistvá funkce $f$ je omezená v pásu $|\Im z| \le \eta$ pro $0 < \eta < \infty$. Označme

$$\mathscr{M}_f(\eta) := \sup_{|y|\le\eta} |f(x+iy)|.$$

Pak

$$\rho_s := \limsup_{\eta\to\infty} \frac{\log\log \mathscr{M}_f(\eta)}{\eta}$$

nazýváme *s-řádem* funkce $f$. Pro funkci s-řádu $\rho_s \in (0,\infty)$ definujeme její *s-typ* jako

$$T_s := \limsup_{\eta\to\infty} \frac{\log \mathscr{M}_f(\eta)}{e^{\eta\rho_s}}.$$

Funkce řádu $\rho < 1$ a funkce řádu $\rho = 1$ typu $T < \infty$ tvoří třídu *celistvých funkcí exponenciálního typu*.

**Příklady.** Funkce $f_1 := e^{3x}$ nabývá hodnoty $M_{f_1}(r)$ na reálné ose. Je tedy

$$\begin{aligned}\rho[f_1] &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log(3r)}{\log r} = 1,\\ T[f_1] &= \limsup_{r\to\infty} \frac{3r}{r} = 3\end{aligned}$$

a $f_1$ je řádu 1 typu 3.

Funkce $f_2 := e^{x^2}$ splňuje

$$\begin{aligned}\rho[f_2] &= \limsup_{r\to\infty} \frac{2\log(r)}{\log r} = 2,\\ T[f_2] &= \limsup_{r\to\infty} \frac{r^2}{r^2} = 1\end{aligned}$$

a je řádu 2 typu 1.

Funkce $f_3 := e^{2\sin x}$ „roste“ po imaginární ose rychleji než libovolná mocnina exponenciály; je proto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_3(xi)}{e^{xi}} = \infty$$

a $f_3$ je řádu $\infty$. Zajímavější je v tomto případě s-řád a s-typ: platí

$$f_3(x+iy) = e^{2\sin x} = e^{2(\sin x\cosh y - i\cos x\sinh y)},$$

tedy

$$\mathscr{M}_{f_3}(\eta) = \sup_{|y|\le\eta} \left|e^{2(\sin x\cosh y - i\cos x\sinh y)}\right| = e^{2\cosh\eta}.$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned}\rho_s[f_3] &= \limsup_{\eta\to\infty} \frac{\log(e^\eta + e^{-\eta})}{\eta} = 1,\\ T_s[f_3] &= \limsup_{\eta\to\infty} \frac{e^\eta + e^{-\eta}}{e^\eta} = 1\end{aligned}$$

a $f_3$ je s-řádu 1 s-typu 1.

Nakonec mějme $f_4 := e^{\cos^2 x}$. Tato funkce je opět řádu $\infty$; tentokrát

$$\mathscr{M}_{f_4}(\eta) = \sup_{|y|\le\eta} \left|e^{(\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y)^2}\right| = e^{\cosh^2\eta},$$

a tedy

$$\begin{aligned}\rho_s[f_4] &= \limsup_{\eta\to\infty} \frac{2\log(\frac{e^\eta+e^{-\eta}}{2})}{\eta} = 2,\\ T_s[f_4] &= \limsup_{\eta\to\infty} \frac{((e^\eta+e^{-\eta})/2)^2}{e^{2\eta}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

a $f_4$ je s-řádu 2 s-typu 1/2.

Označme $\bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ jako množinu všech spojitých $2\pi$-periodických funkcí $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Pro Fourierovy koeficienty funkcí z $\bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ platí $\hat{f}(-n)=\overline{\hat{f}(n)}$ pro $n\in\mathbb{N}$. Fourierova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inz}$ pak definuje celistvou funkci tehdy a jen tehdy, pokud

$$\lim_{n\to\infty}|\hat{f}(n)|^{1/n}=0\,. \tag{8}$$

Řád i typ celistvé funkce jsou jednoznačně určeny hodnotami $\hat{f}(n), n\in\mathbb{N}$. Pro následující odhady definujme ještě

$$R_n^*[f] := \sup_{|h|\le\pi/n}|R_n[f_h]|\,.$$

**Lemma 2.4.1** (viz [7], Lemma III)**.** *Řada*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{inz}\quad (a_{-n}=\overline{a_n},\, n\in\mathbb{N}) \tag{9}$$

*definuje celistvou funkci konečného řádu $\rho\ge 1$ tehdy a jen tehdy, pokud*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log\log|a_n|^{-1}}=\frac{\rho-1}{\rho}\,.$$

*Důkaz.* Nejprve předpokládejme, že $f(x)$ je celistvá funkce řádu $\rho$. Pak pro dané $\varepsilon>0$ a dostatečně velké $|x|$ platí

$$|f(x)|<e^{|x|^{\rho+\varepsilon}}\,. \tag{10}$$

Hodnotu $a_n$ můžeme (periodičnost, Cauchyův vzorec) počítat takto:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-ir}^{2\pi-ir} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-ir)e^{-in(t-ir)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-nr}\int_0^{2\pi} f(t-ir)e^{-int}\,\mathrm{d}t\,, \\
|a_n| &\le e^{(r+\pi)^{\rho+\varepsilon}-nr}\,, \qquad (11)
\end{aligned}$$

využíváme (10). Pro dané $n$ teď zvolíme $r$ tak, abychom minimalizovali pravou stranu (11). Výpočtem dospějeme k tomu, že

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log\log|a_n|^{-1}} \le \frac{\rho-1}{\rho}\,.$$

Naopak, předpokládejme, že

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log\log|a_n|^{-1}} = k > 0\,.$$

Pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí

$$|a_n e^{inx}| < e^{-n^{k+\varepsilon}+n|x|}\,.$$

Z toho dostáváme, že

$$\rho \ge \frac{k}{k-1}\,,$$

tedy Lemma 2.4.1 platí. □

**Věta 2.4.2.** *Funkce $f \in \bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ je restrikcí do $\mathbb{R}$ celistvé funkce řádu $\rho \ge 1$ tehdy a jen tehdy, pokud*

$$\lambda := \limsup_{n\to\infty}\frac{\log n}{\log\log(R_n^*[f])^{-1}} = \frac{\rho-1}{\rho}\,.$$

*Důkaz.* Nejprve nechť $f$ je celistvá funkce řádu $\rho \ge 1$. Této funkci přísluší Fourierova řada

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inz} \text{ kde } a_{-n} = \overline{a_n},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Pro dané $\varepsilon > 0$ plyne z Lemmatu 2.4.1, že

$$|a_n| < \exp\left(-|n|^{\rho/(\rho-1+\varepsilon\rho)}\right) \quad \text{pro } n \geq n_0.$$

Jestliže nyní použijeme Lemma 2.1.4, dostaneme

$$R_n^*[f] \leq 4\pi \sum_{j=1}^{\infty} |a_{jn}| \leq 4\pi \sum_{j=1}^{\infty} \exp\left(-(jn)^{\rho/(\rho-1+\rho\varepsilon)}\right) .$$

Pro dostatečně velká $n$ můžeme součet odhadnout dvojnásobkem jeho prvního členu:

$$R_n^*[f] \leq 8\pi \exp\left(-n^{\rho/(\rho-1+\rho\varepsilon)}\right) .$$

Upravujme dále tuto nerovnost:

$$\begin{aligned}
R_n^*[f] &\leq 8\pi \exp\left(-n^{\rho/(\rho-1+\rho\varepsilon)}\right) \\
\log\left(R_n^*[f]\right)^{-1} &\geq n^{\rho/(\rho-1+\rho\varepsilon)} - \log(8\pi) \\
\log_n\left(\log R_n^*[f]^{-1} + C\right) &\geq \frac{\rho}{\rho-1+\rho\varepsilon} \\
\frac{\log n}{\log\left(\log R_n^*[f]^{-1} + C\right)} &\leq \frac{\rho-1}{\rho} + \varepsilon ,
\end{aligned}$$

tedy

$$\lambda := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log\log(R_n^*[f])^{-1})} \leq \frac{\rho-1}{\rho} . \tag{12}$$

Naopak, nechť $\lambda$ je definováno jako v (12). Pak pro $\varepsilon > 0$ můžeme odhadnout

$$R_n^*[f] < \exp\left(-n^{1/(\lambda+\varepsilon)}\right) \quad \text{pro } n \geq n_0.$$

Z Lemmatu 2.1.4 nyní pro každé $n \geq n_0$ existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m \geq m_0$ a $|h| \leq \pi/n$ platí

$$\left| 2\pi \sum_{|j|\leq\lfloor m/n\rfloor}^{*} \left(1 - \frac{|jn|}{m+1}\right) a_{jn} e^{ijnh} \right| < \exp\left(-n^{1/(\lambda+\varepsilon)}\right) .$$

Uvažme opět polynom (6), omezený hodnotou $\exp\left(-n^{1/(\lambda+\varepsilon)}\right)$. Pro koeficient příslušný ke členu $j = 1$ máme

$$\left| 2\pi \left(1 - \frac{n}{m+1}\right) a_n \right| < \exp\left(-n^{1/(\lambda+\varepsilon)}\right) ,$$

z tohoto dostáváme

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log\log |a_n|^{-1}} \le \lambda \,.$$

Dle Lemmatu 2.4.1 má tedy $f$ rozšíření do celistvé funkce řádu $\rho$, kde

$$\frac{\rho - 1}{\rho} \le \lambda \,. \tag{13}$$

Z nerovností (12) a (13) plyne platnost Věty 2.4.2. □

**Důsledek** (praktický)**.** Pokud $f \in \bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ má řád $\rho \ge 1$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \ge n_0$ platí

$$|R_n[f]| \le \exp\left(-n^{\rho/(\rho-1+\varepsilon\rho)}\right) .$$

**Lemma 2.4.3.** *Nechť $f$, definována v (9), je celistvá funkce řádu $\rho > 1$. Pak $f$ je typu $T$ tehdy a jen tehdy, pokud*

$$\beta := \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\rho}\right)^{\rho} \left(\frac{\rho - 1}{\log |a_n|^{-1}}\right)^{\rho-1} = T \,.$$

*Důkaz.* Definujme nejprve pomocnou funkci

$$g(z) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \,.$$

Pro $y > 0$ je

$$\begin{aligned} M_f(y) &\le \max_{-\pi\le x\le\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} e^{-in(x+iy)} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in(x+iy)} \right| \\ &\le M_g(e^y) + M_g(1) \,, \end{aligned} \tag{14}$$

dále pak

$$\begin{aligned} M_f(\sqrt{y^2+\pi^2}) &\ge \max_{-\pi\le x\le\pi} \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} e^{-in(x+iy)} + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{in(x+iy)} \right| \\ &\ge M_g(e^y) - M_g(1) \,. \end{aligned} \tag{15}$$

Nahradíme-li $e^y$ za $r$, vidíme z (14) a (15), že řád i typ funkce $f$ můžeme zjistit pomocí $M_g(r)$ takto:

$$\begin{aligned}\rho &:= \limsup_{y\to\infty} \frac{\log\log M_f(y)}{\log y} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M_g(r)}{\log\log r} \\ T &:= \limsup_{y\to\infty} \frac{\log M_f(y)}{y^\rho} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_g(r)}{(\log r)^\rho} .\end{aligned}$$

Dle [6, Věta 2] je

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log M_g(r)}{(\log r)^\rho} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\rho^\rho} \cdot n^\rho \cdot \left(\frac{\rho-1}{\log|a_n|^{-1}}\right)^{\rho-1} ,$$

tedy Lemma 2.4.3 platí. □

**Věta 2.4.4.** *Funkce $f \in \bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ je restrikcí do $\mathbb{R}$ celistvé funkce řádu $\infty > \rho > 1$ a typu $T$ tehdy a jen tehdy, pokud*

$$T := \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\rho}\right)^\rho \left(\frac{\rho-1}{\log(R_n^*[f])^{-1}}\right)^{\rho-1} .$$

*Důkaz.* Důkaz Věty 2.4.4 je stejný jako důkaz Věty 2.4.2, jen místo Lemmatu 2.4.1 použijeme Lemma 2.4.3. □

**Důsledek** (praktický)**.** Pokud $f \in \bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ má řád $\infty > \rho > 1$ a typ $T$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$|R_n[f]| \leq \exp\left(-n^{\rho/(\rho-1)} \cdot \frac{\rho-1}{\rho} \cdot (\rho(T+\varepsilon))^{-1/(\rho-1)}\right) .$$

**Lemma 2.4.5** (viz [5], Věta 2.2.2, s. 9)**.** *Nechť $f$, definována v (9), je celistvá funkce s-řádu $\rho_s$ tehdy a jen tehdy, pokud*

$$\rho_s = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\log|a_n|^{-1}} .$$

**Věta 2.4.6.** *Funkce $f \in \bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ je restrikcí do $\mathbb{R}$ celistvé funkce konečného s-řádu $\infty > \rho_s > 0$ tehdy a jen tehdy, pokud*

$$\rho_s = \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\log(R_n^*[f])^{-1}} .$$

*Důkaz.* Důkaz Věty 2.4.6 je stejný jako důkaz Věty 2.4.2, jen místo Lemmatu 2.4.1 použijeme Lemma 2.4.5. □

**Důsledek** (praktický)**.** Pokud $f \in \bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ má s-řád $\rho_s$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$|R_n[f]| \leq n^{-n/(\rho_s+\varepsilon)} .$$

**Lemma 2.4.7** (viz [5], Věta 2.2.10, s. 11)**.** *Nechť $f$, definována v (9), je celistvá funkce s-řádu $\infty > \rho_s > 0$ a s-typu $T_s$ tehdy a jen tehdy, pokud*

$$e\rho_s T_s = \limsup_{n\to\infty} n|a_n|^{\rho_s/n} .$$

**Věta 2.4.8.** *Funkce $f \in \bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ je restrikcí do $\mathbb{R}$ celistvé funkce s-řádu $\infty > \rho_s > 0$ a s-typu $T_s$ tehdy a jen tehdy, pokud*

$$e\rho_s T_s = \limsup_{n\to\infty} n(R_n^*[f])^{\rho_s/n} .$$

*Důkaz.* Důkaz Věty 2.4.8 je stejný jako důkaz Věty 2.4.2, jen místo Lemmatu 2.4.1 použijeme Lemma 2.4.7. □

**Důsledek** (praktický)**.** Pokud $f \in \bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ má s-řád $\infty > \rho_s > 0$ a s-typ $T_s$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí

$$|R_n[f]| \leq \left(\frac{e\rho_s T_s + \varepsilon}{n}\right)^{n/\rho_s} .$$

**Příklad.** Uvažme funkci $f_3$, definovanou výše. Její restrikce do $\mathbb{R}$ patří do $\bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. S použitím výše uvedených vět dostáváme tyto odhady:

O1 (Věta 2.4.2) - $|R_n[f_3]| \leq \exp\left(-n^{(1/(1+\varepsilon))}\right)$

O2 (Věta 2.4.4) - nelze aplikovat, protože $\rho[f_3] = \infty$

O3 (Věta 2.4.6) - $|R_n[f_3]| \leq n^{-n/(1+\varepsilon)}$

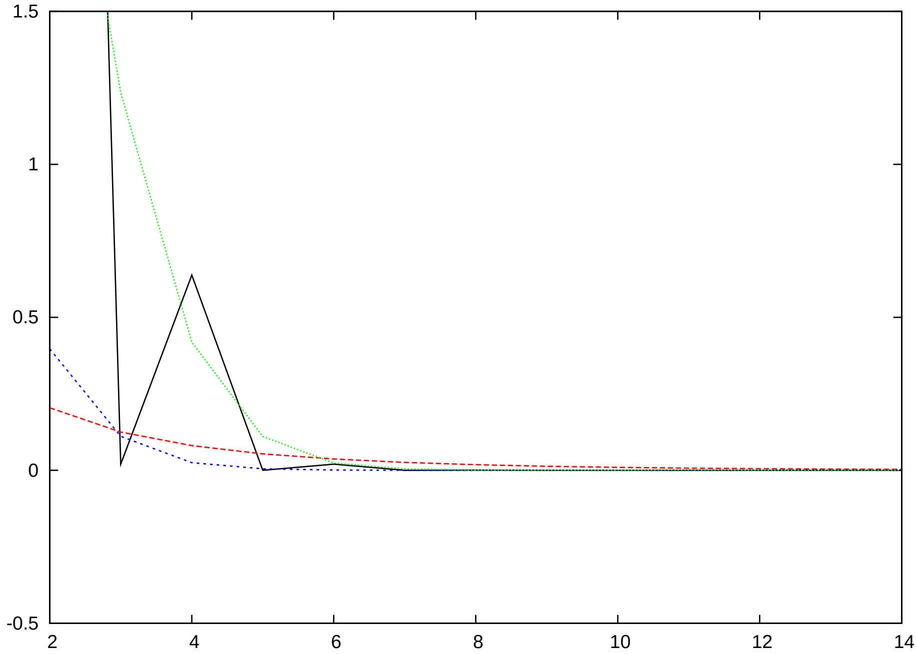
O4 (Věta 2.4.8) - $|R_n[f_3]| \leq \left(\frac{e+\varepsilon}{n}\right)^n$

Přesná hodnota integrálu $\int_0^{2\pi} f_3(x)\,\mathrm{d}x$ je 14.323056878101..., Tabulka 1 ukazuje hodnoty spočítané lichoběžníkovým pravidlem pro $n = 2, \ldots, 15$ a jejich odchylku od přesného řešení.

| $n$ | $\frac{2\pi}{n}\sum_{\eta=1}^{n} f_3\left(\frac{2\pi\eta}{n}\right)$ | $\lvert R_n[f_3]\rvert$ |
|---|---|---|
| 2 | 6.28318530718 | 8.04E–00 |
| 3 | 14.3029485349 | 2.01E–02 |
| 4 | 14.9608789981 | 6.38E–01 |
| 5 | 14.3230530869 | 3.79E–06 |
| 6 | 14.3029485349 | 2.01E–02 |
| 7 | 14.3230568779 | 1.54E–10 |
| 8 | 14.3234049586 | 3.48E–04 |
| 9 | 14.3230568781 | 2.07E–15 |
| 10 | 14.3230530869 | 3.79E–06 |
| 11 | 14.3230568781 | 1.17E–20 |
| 12 | 14.3230569064 | 2.83E–08 |
| 13 | 14.3230568781 | 3.23E–26 |
| 14 | 14.3230568779 | 1.54E–10 |
| 15 | 14.3230568781 | 4.89E–32 |

Tabulka 1: Lichoběžníkové pravidlo pro $f_3$

V Tabulce 2 je vidět jednotlivé odhady chyb. Tyto výsledky jsou spočítány pro $\varepsilon = 0.5$. Odhady O3 a O4 jsou výrazně přesnější, než odhad O1. Hodnoty jsou též vykresleny na Obrázku 2; černá čára představuje skutečnou chybu, červená, modrá a zelená jsou odhady O1, O3 a O4.




Obrázek 2: Odhady chyb pro $f_3$, $\varepsilon = 0.5$

| $n$ | $\lvert R_n[f_3]\rvert$ | O1 | O3 | O4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8.04E–00 | 0.20445 | 3.9685E–01 | 2.5893E–00 |
| 3 | 2.01E–02 | 0.12492 | 1.1111E–01 | 1.2346E–00 |
| 4 | 6.38E–01 | 0.08047 | 2.4803E–02 | 4.1904E–01 |
| 5 | 3.79E–06 | 0.05372 | 4.6784E–03 | 1.1048E–01 |
| 6 | 2.01E–02 | 0.03681 | 7.7161E–04 | 2.3814E–02 |
| 7 | 1.54E–10 | 0.02575 | 1.1382E–04 | 4.3419E–03 |
| 8 | 3.48E–04 | 0.01832 | 1.5259E–05 | 6.8592E–04 |
| 9 | 2.07E–15 | 0.01321 | 1.8817E–06 | 9.5595E–05 |
| 10 | 3.79E–06 | 0.00964 | 2.1544E–07 | 1.1919E–05 |
| 11 | 1.17E–20 | 0.00711 | 2.3074E–08 | 1.3445E–03 |
| 12 | 2.83E–08 | 0.00529 | 2.3256E–09 | 1.3846E–07 |
| 13 | 3.23E–26 | 0.00397 | 2.2173E–10 | 1.3117E–08 |
| 14 | 1.54E–10 | 0.00300 | 2.0082E–11 | 1.1507E–09 |
| 15 | 4.89E–32 | 0.00228 | 1.7342E–12 | 9.3971E–11 |

Tabulka 2: Odhady chyb pro $f_3$, $\varepsilon = 0.5$

| $n$ | $\frac{2\pi}{m}\sum_{\eta=1}^{n} f_4\left(\frac{2\pi\eta}{n}\right)$ | $\lvert R_n[f_4]\rvert$ |
|---|---|---|
| 2 | 17.0794684453 | 6.06E–00 |
| 3 | 11.0716692366 | 5.48E–02 |
| 4 | 11.6813268763 | 6.64E–01 |
| 5 | 11.0170299191 | 1.70E–04 |
| 6 | 11.0716692366 | 5.48E–02 |
| 7 | 11.0168598006 | 2.53E–07 |
| 8 | 11.0202740700 | 3.41E–03 |
| 9 | 11.0168595480 | 2.19E–10 |
| 10 | 11.0170299191 | 1.70E–04 |
| 11 | 11.0168595478 | 1.24E–13 |
| 12 | 11.0168666360 | 7.09E–06 |
| 13 | 11.0168595478 | 3.55E–15 |
| 14 | 11.0168598006 | 2.53E–07 |
| 15 | 11.0168595478 | 1.78E–15 |

Tabulka 3: lichoběžníkové pravidlo pro $f_4$

**Příklad.** Nyní uvažme funkci $f_4$, též definovanou výše. Její restrikce do $\mathbb{R}$ patří do $\bar{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Opět máme tyto odhady:

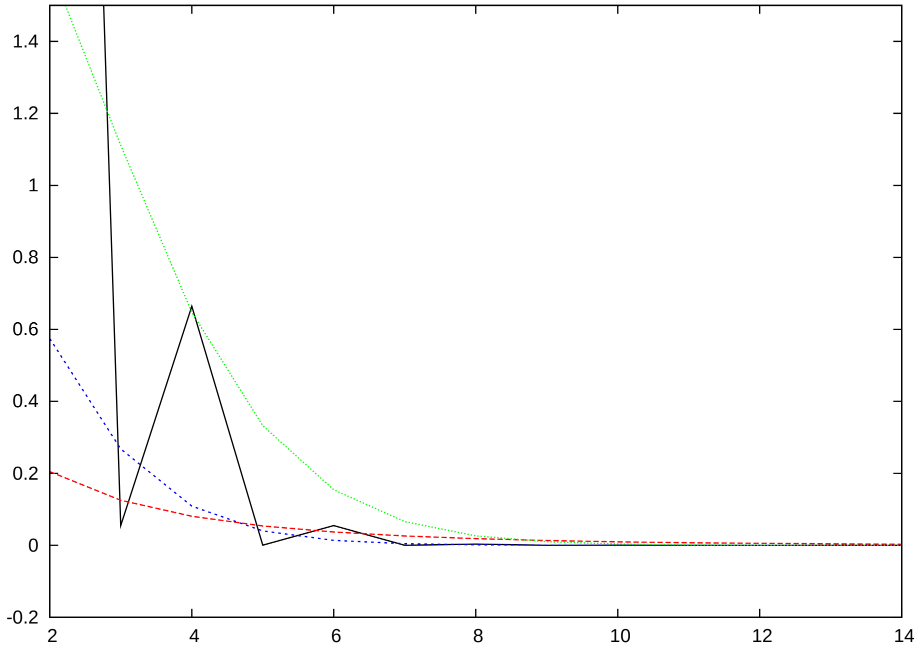
O1 (Věta 2.4.2) - $|R_n[f_3]| \leq \exp\left(-n^{(1/(1+\varepsilon))}\right)$

O3 (Věta 2.4.6) - $|R_n[f_3]| \leq n^{-n/(2+\varepsilon)}$

O4 (Věta 2.4.8) - $|R_n[f_3]| \leq \left(\frac{e+\varepsilon}{n}\right)^n$

Přesná hodnota integrálu $\int_0^{2\pi} f_4(x)\,\mathrm{d}x$ je 11.016859547772..., Tabulka 3 ukazuje hodnoty spočítané lichoběžníkovým pravidlem pro $n = 2\ldots 15$ a jejich odchylku od přesného řešení.

Tabulka 4 opět zobrazuje odhady chyb, viz Obrázek 3. Použito bylo $\varepsilon = 0.5$.




Obrázek 3: Odhady chyb pro $f_4$, $\varepsilon = 0.5$

| $n$ | $\lvert R_n[f_4]\rvert$ | O1 | O3 | O4 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 6.06E–00 | 0.20446 | 5.7435E–01 | 1.6091E–00 |
| 3 | 5.48E–02 | 0.12492 | 2.6758E–01 | 1.1111E–00 |
| 4 | 6.64E–01 | 0.08047 | 1.0882E–01 | 6.4733E–01 |
| 5 | 1.70E–04 | 0.05372 | 4.0000E–02 | 3.3238E–01 |
| 6 | 5.48E–02 | 0.03681 | 1.3566E–02 | 1.5432E–01 |
| 7 | 2.53E–07 | 0.02575 | 4.3026E–03 | 6.5893E–02 |
| 8 | 3.41E–03 | 0.01832 | 1.2886E–03 | 2.6190E–02 |
| 9 | 2.19E–10 | 0.01321 | 3.6705E–04 | 9.7773E–03 |
| 10 | 1.70E–04 | 0.00964 | 1.0000E–04 | 3.4524E–03 |
| 11 | 1.24E–13 | 0.00711 | 2.6174E–05 | 1.1595E–03 |
| 12 | 7.09E–06 | 0.00529 | 6.6059E–06 | 3.7210E–04 |
| 13 | 3.55E–15 | 0.00397 | 1.6125E–06 | 1.1453E–04 |
| 14 | 2.53E–07 | 0.00300 | 3.8167E–07 | 3.3921E–05 |
| 15 | 1.78E–15 | 0.00228 | 8.7792E–08 | 9.6939E–06 |

Tabulka 4: odhady chyb pro $f_4$, $\varepsilon = 0.5$

# 3 Formule pro funkce exponenciálního typu

## 3.1 Integrace po kladné poloose

Vyjděme z následujícího výsledku ([20]): pokud $f$ je celistvá funkce exponenciálního typu méně než $2\pi$ a $f$ je integrovatelná na $\mathbb{R}$, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\,. \tag{16}$$

**Příklad.** Předpoklad na omezení typu funkce nelze zanedbat. Mějme

$$f(z) := \begin{cases} \frac{\sin(2\pi z)}{z} & \text{pro } z \neq 0\,, \\ 2\pi & \text{pro } z = 0\,. \end{cases}$$

$f$ je řádu 1 typu $2\pi$; dále

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \pi \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) &= 2\pi\,. \end{aligned}$$

Vzniká otázka, existuje-li podobná formule i pro integraci pouze přes kladnou poloosu. Pro sudé funkce je (16) ekvivalentní s formulí

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,,$$

je tedy na místě zkoumat vztah mezi $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Abel-Planova formule (viz [9]) dává

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - i \int_0^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{e^{2\pi y} - 1}\,\mathrm{d}y\,, \tag{17}$$

za předpokladu, že

1. $\lim_{y\to\infty} |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y} = 0$ pro všecha $x$,

2. $\int_0^\infty |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y}\, \mathrm{d}y$ existuje pro všecha $x \geq 0$ a dále

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^\infty |f(x \pm iy)| e^{-2\pi y}\, \mathrm{d}y = 0\,.$$

Vzorec (17) vyjadřuje rozdíl

$$E := \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{d}x - \left(\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\right)$$

pomocí integrálu obsahujícího hodnoty $f$ na imaginární ose. V této části práce bude odvozen jiný odhad $E$, který je výhodnější z numerického hlediska.

V následujících lemmatech a větách označení $B_j$ určuje $j$-té Bernoulliho číslo, dále $\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ značí Riemannovu zeta funkci.

**Lemma 3.1.1** ([11, Věta 7]). *Nechť f je holomorfní funkce exponenciálního typu méně než $2\pi$ v pásu $\{z \in \mathbb{C} : -\delta \leq \Re z \leq N + \delta\}$, kde $\delta > 0$ a $N \in \mathbb{N}$. Pak*

$$\begin{aligned} \int_0^N f(x)\ dx \ &= \ \frac{1}{2}(f(0) + f(N)) + \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k} \left(f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(0)\right) \frac{B_{2j}}{(2j)!} + \\ &\quad + i(-1)^k \int_0^\infty L_{2k}(t)(f^{2k}(N+it) - f^{2k}(N-it) \\ &\quad - f^{2k}(it) + f^{2k}(-it))\ dx\,, \end{aligned} \tag{18}$$

*kde*

$$L_k(z) := (-1)^k \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi\nu z}}{(2\pi\nu)^k}\,, \quad k\ \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \Re z\ \geq 0\,. \tag{19}$$

*Důkaz.* Technický důkaz tohoto Lemmatu, formulovaného jako [11, Věta 7], tvoří většinu z téměř třicetistránkového článku [11]. V tomto případě se ovšem jedná jen o jednodušší verzi, totiž (při zachování značení z [11])

$a = 0, b = N, m = 0$, tedy $h = 1$. Důkaz pak - velmi zhruba - postupuje následovně: Chceme dokázat, že v [11, Věta 3] je

$$R_{2,k,1,N}[f] = i\int_0^\infty L_{2,k,1}(t)(f^{2k}(N+it) - f^{2k}(N-it) \\ -f^{2k}(it) + f^{2k}(-it))\,, \tag{20}$$

kde $L_{2,k,1}$ splývá s $L_k$, definovaným v (19). Počítáme tedy $E_0[0,N,f]$, definované na straně 246, pomocí [11, Věta 1]:

$$\begin{aligned} E_0[0,N,f] &= \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}}{(2j)!}(f^{(2j-1)}(N) - f^{(2j-1)}(0)) \qquad (21) \\ &+ i\int_0^N (\Psi_{2k}(u-iT)f^{2k}(u-iT) + \Psi_{2k}(-u-iT)f^{2k}(u+iT))\,\mathrm{d}u \\ &+ \int_0^T \Phi_{2k}(-it)(f^{2k}(N+it) - f^{2k}(N-it) - f^{2k}(it) + f^{2k}(-it))\,\mathrm{d}t\,, \end{aligned}$$

kde

$$\Phi_k(z) := i^{k+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu \frac{e^{-2\pi i\nu z}}{(2\pi\nu)^k}$$
$$\Psi_k(z) := i^{k+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i\nu z}}{(2\pi\nu)^k}\,.$$

Pro $T \to \infty$ druhý integrál v (21) konverguje k pravé straně (20), navíc

$$\lim_{T\to\infty} i\int_0^N (\Psi_{2k}(u-iT)f^{2k}(u-iT) + \Psi_{2k}(-u-iT)f^{2k}(u+iT))\,\mathrm{d}u =$$
$$= \lim_{T\to\infty}(-1)^{k+1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi\nu T}}{(2\pi\nu)^{2k}}\int_0^N (e^{-2\pi i\nu u}f^{2k}(u-iT) - e^{2\pi i\nu u}f^{2k}(u+iT))\,\mathrm{d}u =$$
$$= 0\,,$$

tedy (20) platí. □

**Lemma 3.1.2.** *Nechť $f$ je celistvá funkce exponenciálního typu $\tau$. Pak pro dané $z_0 \in \mathbb{C}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq (\tau + \varepsilon)^n .$$

*Důkaz.* Tento výsledek plyne z (2.2.1) v [5]. □

**Lemma 3.1.3.** *Nechť $f$ je celistvá funkce exponenciálního typu $\tau < 2\pi$ a $\int_0^\infty f(x)\ dx$ existuje. Pak*

$$\lim_{x\to\infty} f^{(j)}(x) = 0 \text{ pro všechna } j \geq 0 .$$

*Navíc ještě*

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\infty L_k(t) f^{(k)}(N \pm it)\ dt = 0 .$$

*Důkaz.* Nejprve nahlédneme ([5, Věta 2.4.1]), že všechny derivace $f$ jsou exponenciálního typu $\tau$. Dále dle ([5, Věta 11.3.4*]) platí, že pokud existuje $\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x$, pak

$$\lim_{x\to\infty} f^{(j)}(x) = 0 \text{ pro všechna } j \geq 0 ,$$

a tedy $f^{(k)}(x)$ je omezená na $[0, +\infty)$. Jsou tedy splněny předpoklady [5, Věta 6.2.3] a je

$$|f^{(k)}(x)| \leq Ce^{(\pi+\tau/2)|y|} \qquad \text{pro } x \in [0, +\infty),\ y \in \mathbb{R},\ C > 0 .$$

Tedy dle definice (19) je pro $y > 0$

$$\begin{aligned}
\left| \int_y^\infty L_k(t) f^{(k)}(N \pm it)\ \mathrm{d}t \right| &\leq \left| \int_y^\infty \sum_{\nu=1}^\infty \frac{e^{-2\pi\nu t}}{(2\pi\nu)^k} \cdot Ce^{(\pi+\tau/2)t}\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leq C \left| \int_y^\infty \sum_{\nu=1}^\infty \frac{e^{-2\pi\nu t + \pi t + \tau t/2}}{(2\pi\nu)^k}\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{C}{(2\pi)^k} \zeta(k) \int_y^\infty e^{-(\pi-\tau/2)t}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{C}{(2\pi)^k} \frac{\zeta(k)}{\pi - \tau/2} e^{-(\pi-\tau/2)y} .
\end{aligned}$$

Tento člen se pro $y \to +\infty$ blíží nule. Aplikujme ještě [5, Věta 6.2.8] - dostáváme, že

$$\lim_{n\to+\infty} f^{(k)}(x+iy) = 0$$

pro všechna $y > 0$. Tedy platí zbývající rovnost

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^y L_k(t) f^{(k)}(N \pm it)\ \mathrm{d}t = 0$$

pro všechna $y > 0$. $\square$

**Lemma 3.1.4.** *Nechť $f$ je celistvá funkce exponenciálního typu $\tau < 2\pi$. Pak*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty L_k(t) f^{(k)}(t)\ dt = 0\,.$$

*Důkaz.* Označme si integrály, jejichž limitu zkoumáme, jako posloupnost $\{I_k\}$, $I_k := \int_0^\infty L_k(t) f^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t$. Vidíme, že $I_k$ existuje pro všechna $k \geq 2$, protože všechny $f^{(k)}$ jsou exponenciálního typu méně než $2\pi$. Všimneme si ještě, že platí

$$\frac{\partial}{\partial t} L_k(t) = L_{k-1}(t)\,.$$

Nyní můžeme integrovat *per partes*:

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^\infty L_k(t) f^{(k)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= [L_{k+1}(t) f^{(k)}(t)]_0^\infty - \int_0^\infty L_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= -L_{k+1}(0) f^{(k)}(0) - I_{k+1}\,, \end{aligned}$$

tedy pro všechna $k > 2$ platí

$$I_2 = \sum_{j=2}^{k-1} (-1)^{j+1} L_{j+1}(0) f^{(j)}(0) + (-1)^k I_k\,.$$

Pro platnost Lemmatu 3.1.4 tak stačí ukázat, že

$$I_2 = \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j+1} L_{j+1}(0) f^{(j)}(0)\,.$$

K tomuto dospějeme takto: $I_2 = \lim_{T\to\infty} \int_0^T L_2(t) f^{(2)}(t)\ \mathrm{d}t$, přičemž uvážíme, že

$$f^{(2)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+2)}(0)}{n!} t^n \,.$$

Tedy

$$\int_0^T L_2(t) f^{(2)}(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{f^{(n+2)}(0)}{n!} \int_0^T L_2(t) t^n\ \mathrm{d}t \right) \quad (T > 0). \tag{22}$$

Budeme opět integrovat po částech:

$$\begin{aligned} \int_0^T L_2(t) t^n\ \mathrm{d}t &= -n \int_0^\infty L_3(t) t^{n-1}\ \mathrm{d}t = n(n-1) \int_0^\infty L_4(t) t^{n-2}\ \mathrm{d}t \\ &= \ldots = (-1)^{n+1} n! L_{n+1}(0)\,, \end{aligned} \tag{23}$$

dále

$$(-1)^{n+1} L_{n+1}(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi j)^{n+3}} = \frac{1}{(2\pi)^{n+3}} \zeta(n+3) \le \frac{\zeta(3)}{(2\pi)^{n+3}} \,. \tag{24}$$

Z odhadů (23) a (24) tak dostáváme

$$\left| \frac{f^{(n+2)}(0)}{n!} \int_0^T L_2(t) t^n\ \mathrm{d}t \right| \le |f^{(n+2)}(0) L_{n+3}(0)| \le \frac{|f^{(n+2)}(0)|}{(2\pi)^{n+2}} \frac{\zeta(3)}{2\pi} \tag{25}$$

pro všechna $T > 0$. Dle Lemmatu 3.1.2 pro $n \to \infty$ pravá strana (25) konverguje k nule, a součet v (22) má konvergentní majorantu nezávislou na $T$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty L_2(t) f^{(2)}(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} L_{n+3}(0) f^{(n+2)}(0) \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j+1} L_{j+1}(0) f^{j}(0)\,, \end{aligned}$$

takže

$$\lim_{k\to\infty} I_k = 0\,,$$

což jsme měli dokázat. □

**Věta 3.1.5.** *Nechť $f$ je celistvá funkce exponenciálního typu $\tau < 2\pi$ a $\int_0^\infty f(x)\ dx$ existuje. Pak*

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n) + \sum_{j=1}^\infty f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!}\,.$$

*Důkaz.* Vyjděme z Lemmatu 3.1.1. Z (18) a Lemmatu 3.1.3 plyne, že pro $N \to \infty$ je

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n) + \sum_{j=1}^k f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!} \\ -i(-1)^k\int_0^\infty L_{2k}(t)(f^{2k}(it) - f^{2k}(-it))\ \mathrm{d}t\,.\end{aligned} \tag{26}$$

Funkce $f(x)$, $f(i\cdot x)$ i $f(-i\cdot x)$ jsou exponenciálního typu méně než $2\pi$, tedy dle Lemmatu 3.1.4 je

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^k f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!} - i(-1)^k\int_0^\infty L_{2k}(t)(f^{2k}(it) - f^{2k}(-it)) =$$
$$= \sum_{j=1}^\infty f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!}\,.$$

□

**Věta 3.1.6.** *Nechť platí předpoklady Věty 3.1.5 a navíc $f$ je omezená na reálné ose konstantou $M$. Pak pro všechna $k \geq 2$ platí*

$$\int_0^\infty f(x)\ dx = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n) + \sum_{j=1}^{k-1} f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!} + \mathscr{R}_k[f]\,,$$

*kde*

$$\mathscr{R}_k[f] \leq \frac{2M\zeta(2k)}{(1-(\tau/2\pi)^2)\tau}\cdot\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{2k}\,. \tag{27}$$

*Důkaz.* Dle Věty 3.1.5 je

$$\mathscr{R}_k[f] = \sum_{j=k}^\infty f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!}\,.$$

Uvažme nyní Bernsteinovu nerovnost ([5, Věta 11.1.2]), která říká, že pro celistvou funkci exponenciálního typu $\tau$, omezenou na reálné ose konstantou $M$, platí $|f'(x)| \leq M\tau$. Když tuto nerovnost opakovaně aplikujeme, dostaneme

$$|f^{(2j-1)}(0)| \leq M\tau^{2j-1} . \tag{28}$$

Využijme ještě následující Eulerovy identity pro Bernoulliho čísla ([12], [13]):

$$B_{2j} = \frac{(-1)^{j+1} 2(2j)!}{(2\pi)^{2j}} \zeta(2j)$$

Je tedy celkem

$$\begin{aligned} |\mathscr{R}_k[f]| &\leq \sum_{j=k}^{\infty} M\tau^{2j-1} \frac{(-1)^{j+1}2(2j)!}{(2\pi)^{2j}} \frac{\zeta(2j)}{(2j)!} = \qquad (29) \\ &= M \sum_{j=k}^{\infty} \frac{2\zeta(2j)}{(2\pi)^{2j}} \tau^{2j-1} \leq \frac{2M\zeta(2k)}{\tau} \sum_{j=k}^{\infty} \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^{2j} , \end{aligned}$$

tedy (27) platí. □

**Poznámka.** Předpoklad, omezující typ funkce $f$, lze zeslabit. Pokud je totiž $f$ exponenciálního typu $\tau$, pak $f(h \cdot x)$ je též celistvá funkce exponenciálního typu menšího než $2\pi$ pro všechna $h \in (0, 2\pi/\tau)$. Dále je

$$\int_0^{\infty} f(x)\, \mathrm{d}x = h \int_0^{\infty} f(h \cdot x)\, \mathrm{d}x ,$$

vidíme tedy, že můžeme vzít funkci libovolného exponenciálního typu, a odhad formulovat pro $f(h \cdot x)$.

**Poznámka.** Zeslabit lze dokonce i předpoklad na omezenost funkce $f$ ve Větě 3.1.6. Jak je vidět z důkazu, tento fakt je nutný v nerovnosti (28), nicméně v (29) potřebujeme odhadnout jen liché derivace $f$. Stačí tedy předpokládat, že $|f^{(j)}(0)| \leq M\tau^j$ pro $j = 3, 5, 7, \ldots$.

## 3.2 Příklady

Jak bylo zmíněno v první z předchozích poznámek, je výhodné využít transformované funkce $f(h \cdot x)$ dokonce i v případech, kdy $f$ splňuje předpoklady Věty 3.1.6. V takovém případě pak dostáváme následující odhad:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x &= h\int_0^\infty f(h\cdot x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{h}{2} + h\sum_{n=1}^{\infty} f(hn) + \sum_{j=1}^{k-1} h^{2j} f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!} + \mathscr{R}_k(h)[f]\,,\end{aligned} \tag{30}$$

kde

$$|\mathscr{R}_k(h)[f]| \leq \frac{2M\zeta(2k)}{\tau(1-(h\tau/2\pi)^2)}\left(\frac{h\tau}{2\pi}\right)^{2k}.$$

**Příklad.** Uvažme funkci $f_1$, definovanou takto:

$$f_1(x) := \begin{cases} \frac{\cos(\pi x)}{x+1/2} & \text{pro } x \neq -\frac{1}{2}\,, \\ \pi & \text{pro } x = -\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Tato funkce nabývá na reálné ose maxima $\pi$ a je exponenciálního typu $\pi$. Můžeme tedy přímo aplikovat Větu 3.1.6. Namísto toho však využijme tvaru (30) tak, že zvolíme

$$h = \frac{1}{2^m}\,, m \in \mathbb{N}\,.$$

Pro $m = 0$ pak nastává původní případ nezměněné funkce $f_1$. V tomto případě tedy (30) vypadá takto:

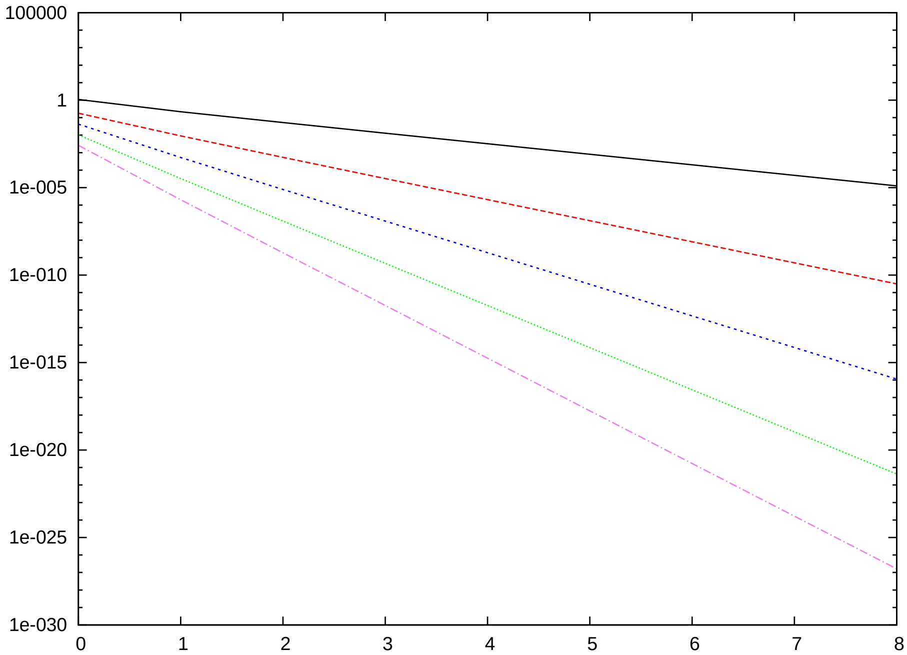
$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_1(x)\,\mathrm{d}x &= 2^{-m} + 2^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n 2^{-m})}{n2^{-m}+1/2} \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-2mj} f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!} + \mathscr{R}_k(2^{-m})[f_1] \\ &= 2^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n 2^{-m})}{n+2^{m-1}} \\ &+ \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-2mj} f^{(2j-1)}(0)\frac{B_{2j}}{(2j)!} + \mathscr{R}_k(2^{-m})[f_1]\,,\end{aligned}$$

kde

$$|\mathscr{R}_k(2^{-m})[f_1]| \le \frac{2\zeta(2k)}{1-4^{-m-1}} \frac{1}{4^{k(m+1)}}\,.$$

| $m\backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.10E–00 | 1.80E–01 | 4.24E–02 | 1.05E–02 | 2.61E–03 |
| 1 | 2.19E–01 | 9.02E–03 | 5.30E–04 | 3.27E–05 | 2.04E–06 |
| 2 | 5.22E–02 | 5.37E–04 | 7.88E–06 | 1.22E–07 | 1.89E–09 |
| 3 | 1.29E–02 | 3.32E–05 | 1.22E–07 | 4.69E–10 | 1.83E–12 |
| 4 | 3.22E–03 | 2.07E–06 | 1.90E–09 | 1.83E–12 | 1.78E–15 |
| 5 | 8.03E–04 | 1.29E–07 | 2.96E–11 | 7.14E–15 | 1.74E–18 |
| 6 | 2.01E–04 | 8.06E–09 | 4.63E–13 | 2.79E–17 | 1.70E–21 |
| 7 | 5.02E–05 | 5.04E–10 | 7.23E–15 | 1.09E–19 | 1.66E–24 |
| 8 | 1.25E–05 | 3.15E–11 | 1.13E–16 | 4.25E–22 | 1.62E–27 |

Tabulka 5: Hodnoty $\mathscr{R}_k(2^{-m})[f_1]$




Obrázek 4: Hodnoty $\mathscr{R}_k(2^{-m})[f_1]$ pro $k = 1, \ldots, 5$; $m = 0, \ldots, 8$

Tabulka 5 ukazuje hodnoty omezující $\mathscr{R}_k(2^{-m})[f_1]$. Ty jsou též vykresleny na Obrázku (4) (v logaritmické stupnici). Zbývá vypočítat nekonečný součet. K jeho hodnotě se lze dostat takto:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi n 2^{-m})}{n+2^{m-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n 2^{-m}+\pi/2)}{n+2^{m-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi 2^{-m}(n+2^{m-1}))}{n+2^{m-1}} \\ &= \sum_{n=1+2^{m-1}}^{\infty}\frac{\sin(\pi n 2^{-m})}{n} \\ &= \frac{\pi}{2}(1-2^{-m}) - \sum_{n=1}^{2^{m-1}}\frac{\sin(\pi n 2^{-m})}{n} =: Q_m\,.\end{aligned}$$

Pro případ $m=0$ nabývá veličina $Q_m$ hodnoty $\frac{\pi}{2}-2$.

V Tabulce 6 jsou vidět přibližně spočtené hodnoty integrálu pro $k=2,3$ a $m=0\ldots8$, tj.

$$\begin{aligned}I_{2,m} &:= 2^{-m}+Q_m+2^{-2m}\frac{2}{12} \\ I_{3,m} &:= 2^{-m}+Q_m+2^{-2m}\frac{2}{12}-2^{-4m}(12\pi^2-96)\frac{1}{720}\,.\end{aligned}$$

| $m$ | $I_{2,m}$ | $I_{3,m}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.237462993461563 | 0.206302920110074 |
| 1 | 0.202064830064115 | 0.200117325479647 |
| 2 | 0.200157130576292 | 0.200035411539762 |
| 3 | 0.200041785483409 | 0.200034178043626 |
| 4 | 0.200034634407901 | 0.200034158942914 |
| 5 | 0.200034188361694 | 0.200034158645132 |
| 6 | 0.200034160497767 | 0.200034158640482 |
| 7 | 0.200034158756490 | 0.200034158640409 |
| 8 | 0.200034158647663 | 0.200034158640408 |

Tabulka 6: Hodnoty $I_{2,m}$ a $I_{3,m}$ pro $f_1$

**Příklad.** Uvažme nyní funkci

$$f_2(x) := e^{-x} \cos x\,.$$

Tu můžeme zapsat v exponenciálním tvaru takto:

$$f_2(x) = \frac{e^{-x(1+i)} + e^{-x(1-i)}}{2}\,.$$

Je patrné, že $f_2$ je exponenciálního typu $\tau = \sqrt{2}$. Tato funkce není na reálné ose omezená, nicméně i zde lze Větu 3.1.6 použít: snadno nahlédneme, že

$$f_2^{(2j+1)}(x) = c_1 2^j e^{-x} \cos(x) + c_2 2^j e^{-x} \sin(x)\,,$$

kde $c_1$ a $c_2$ střídavě nabývají hodnot $\pm 1$. Je tedy

$$|f_2^{(2j+1)}(0)| = 2^j = (\sqrt{2})^{2j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^{2j+1}$$

a lze využít druhé poznámky o omezenosti lichých derivací. Tedy pro výpočet je $M = 1/\sqrt{2}, \tau = \sqrt{2}$ a za účelem zobecnění $h = \pi 2^{-m}$. Stejně jako v minulém příkladu, Tabulka 7 ukazuje hodnoty omezující

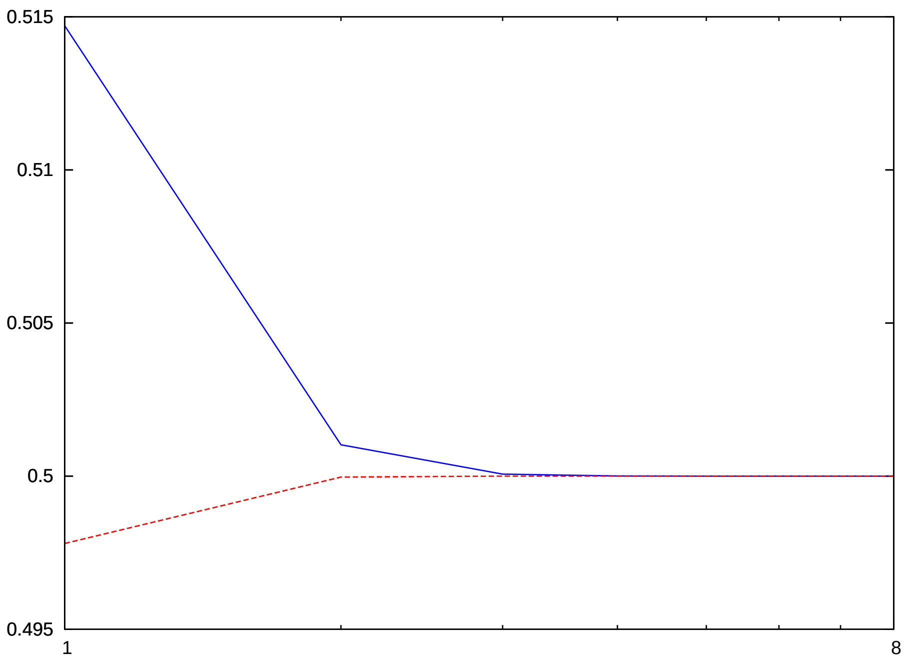
$$\mathscr{R}_k(2^{-m})[f_2] \leq \frac{\zeta(2k)}{1 - 2^{-(2m+1)}} 2^{-k(2m+1)}\,.$$

| $m \backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.64E–00 | 5.41E–01 | 2.54E–01 | 1.26E–01 | 6.26E–02 |
| 1 | 2.35E–01 | 1.93E–02 | 2.27E–03 | 2.80E–04 | 3.49E–05 |
| 2 | 5.31E–02 | 1.09E–03 | 3.20E–05 | 9.88E–07 | 3.08E–08 |
| 3 | 1.30E–02 | 6.66E–05 | 4.89E–07 | 3.77E–09 | 2.94E–11 |
| 4 | 3.22E–03 | 4.14E–06 | 7.59E–09 | 1.46E–11 | 2.85E–14 |
| 5 | 8.04E–04 | 2.58E–07 | 1.18E–10 | 5.71E–14 | 2.78E–17 |
| 6 | 2.01E–04 | 1.61E–08 | 1.85E–12 | 2.23E–16 | 2.71E–20 |
| 7 | 5.02E–05 | 1.01E–09 | 2.89E–14 | 8.71E–19 | 2.65E–23 |
| 8 | 1.25E–05 | 6.30E–11 | 4.52E–16 | 3.40E–21 | 2.59E–26 |

Tabulka 7: Hodnoty $\mathscr{R}_k(2^{-m})[f_2]$

| $m$ | $I_{2,m}$ | $I_{3,m}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0.618192486553401 | 0.3476116781256168 |
| 1 | 0.514713001632729 | 0.4978017011059925 |
| 2 | 0.501024982607290 | 0.4999680263243686 |
| 3 | 0.500065570949587 | 0.4999995111819042 |
| 4 | 0.500004121141101 | 0.4999999924056208 |
| 5 | 0.500000257927476 | 0.4999999998815086 |
| 6 | 0.500000016126022 | 0.4999999999981492 |
| 7 | 0.500000001007963 | 0.4999999999999711 |
| 8 | 0.500000000062999 | 0.4999999999999995 |

Tabulka 8: Hodnoty $I_{2.m}$ a $I_{3.m}$ pro $f_2$




Obrázek 5: Hodnoty $I_{2.m}$ a $I_{3.m}$ pro $f_2$

Přesná hodnota $\int_0^\infty f_2(x)\,\mathrm{d}x$ je $\frac{1}{2}$, pro nekonečný součet v (30) platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_2(h \cdot n) = -\frac{1}{2} - \frac{\sinh h}{2(\cos h - \cosh h)}\,,$$

můžeme tedy opět snadno spočítat přibližné hodnoty $I_{2,m}$ a $I_{3,m}$, k nahlédnutí v Tabulce 8 a na Obrázku 5.

# 4 Formule založená na Turánově vzorci

## 4.1 Turánův vzorec

Nechť $X = (x_1, \ldots, x_n)$ je množina $n$ různých bodů na reálné ose, dále nechť $k$ je kladné. Pomocí Hermiteovy interpolace můžeme každý polynom $P(x)$ stupně menšího než $kn$ vyjádřit ve tvaru

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} P^{(j)}(x_i) l_{i,j}(x)\,, \tag{31}$$

kde $l_{i,j}(x) \quad (i = 1, \ldots, n;\ j = 0, \ldots, k-1)$ jsou Hermiteovy bázové polynomy stupně nejvýše $kn - 1$ a platí

$$l_{i,j}^{(m)}(x_k) = \delta_{i,k}\, \delta_{j,m} \quad ,$$

kde

$$\delta_{a,b} := \begin{cases} 1 & \text{pro } a = b \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je Kroneckerovo delta. Rovnost (31) můžeme nyní zintegrovat přes interval $[-1; 1]$. Dostaneme tak tzv. *Šakalovovu kvadraturní formuli* [15]:

$$\int_{-1}^{1} P(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} P^{(j)}(x_i) \lambda_{i,j}\,, \tag{32}$$

kde

$$\lambda_{i,j} = \int_{-1}^{1} l_{i,j}\ \mathrm{d}x \quad (1 \leq i \leq n;\ 0 \leq j \leq k-1)\,.$$

Z (31) plyne, že tato formule je přesná pro všechny polynomy stupně nejvýše $kn - 1$. Je otázkou, zda-li pomocí vhodné volby systému $X$ můžeme docílit přesnosti i pro polynomy vyššího stupně (s ohledem na Gaussovy kvadraturu). Odpověď na tuto otázku dal Paul Turán [16]:

**Věta** (Turán)**.** Při využití existujícího značení:

(i) Pro sudé $k \in \mathbb{N}$ neexistuje žádný systém $X = (x_1, \ldots, x_n)$ takový, že (32) platí pro všechny polynomy stupně $m \leq kn$,

(ii) Pro liché $k \in \mathbb{N}$ neexistuje právě jeden systém $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ takový, že (32) platí pro všechny polynomy stupně $m \leq (k+1)n - 1$,

(iii) Systém $X^*$ je charakterizován následující vlastností:

$$P_{X^*}(x) := \prod_{i=1}^{n} (x - x_i^*)$$

minimalizuje integrál

$$I_k(P) := \int_{-1}^{1} |P(x)|^{k+1} \, \mathrm{d}x$$

přes všechny polynomy stupně $n$, jejichž koeficient u nejvyšší mocniny je roven jedné.

Případ $k = 1$ představuje klasickou Gaussovu kvadraturní formuli.

## 4.2 Hermiteova interpolace funkcí exponenciálního typu

Je známo, že celistvá funkce exponenciálního typu méně než $k\sigma$ je jednoznačně určena svými hodnotami a hodnotami svých derivací až do stupně $k-1$ v bodech množiny $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ([17, s. 1031] či [18, Věta B]). Tyto posloupnosti $\{\lambda_n\}$ jsou dobrými kandidáty do role systému $X$ v případě Hermiteovy interpolace funkcí exponenciálního typu.

**Definice.** Nechť $k \in \mathbb{N}$ a $\sigma > 0$. Označme $M^k(\sigma)$ množinu všech rostoucích reálných posloupností $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ , majících tyto vlastnosti:

(i) $\lambda_0 = 0$ a $\lambda_n \to \pm\infty$ pro $n \to \pm\infty$ .

(ii) Pokud celistvá funkce $f$ exponenciálního typu méně než $k\sigma$ nabývá, společně se svými derivacemi až do stupně $k-1$, v bodech $\lambda_n$ hodnoty 0, pak $f \equiv 0$.

(iii) Pro $\Lambda \in M^k(\sigma)$ existuje celistvá funkce $\varphi_\Lambda$ exponenciálního typu $\sigma$ taková, že $\varphi_\Lambda(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, $\varphi_\Lambda'(0) = 1$ a $\varphi_\Lambda(\lambda_n) = 0$ pro $n \in \mathbb{Z}$ .

(iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}|\varphi_\Lambda(x)|^{k+1}\,\mathrm{d}x < \infty$ .

**Příklad.** Označme $\Lambda^* := \left\{n\frac{\pi}{\sigma}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Je $\Lambda^* \in M_k(\sigma)$, dále je

$$\varphi_{\Lambda^*}(x) := \frac{\sin(\sigma x)}{x} .$$

Za mnoha okolností (viz [17, Věty 3,4,5,6]) lze definovat hermiteovskou interpolaci:

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} f_{(j)}(\lambda_i)L_{i,j}(z)\,, \tag{33}$$

kde

$$L_{i,j}^{(m)}(\lambda_k) = \delta_{i,k}\,\delta_{j,m} .$$

Tato formule platí pro celistvé funkce $f$ exponenciálního typu méně než $k\sigma$, s dodatečnými omezeními rychlosti růstu na reálné ose. Pokud navíc $f \in L^1(\mathbb{R})$, můžeme (33) zintegrovat přes celé $\mathbb{R}$. Dostaneme tak formuli

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} f_{(j)}(\lambda_i)w_{i,j}\,. \tag{34}$$

Ta však stále platí pouze pro funkce exponenciálního typu méně než $k\sigma$. S ohledem na Turánovu větu se můžeme ptát, lze-li toto omezení zeslabit, vhodnou volbou posloupnosti $\Lambda$. Přímou, nicméně nekompletní odpověď dává [19]:

**Věta.** Nechť $k$ je liché přirozené číslo a nechť $\sigma > 0$. Definujme

$$\varphi(z) := \prod_{j=1}^{(k-1)/2} \left(1 + \frac{z^2}{j^2}\right),$$

dále

$$a_{0,0} := 1\,,\, a_{j,k-1} := \frac{-1}{j!}\varphi^{(j)}(0) \qquad \text{pro } 0 \leq j \leq k-1\,.$$

Pokud $f$ je celistvá funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$ a $f \in L^1(\mathbb{R})$, pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sigma} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ sudé}}}^{k-1} (2\sigma)^{-j} a_{j,k-1} f^{(j)}\left(i\frac{\pi}{\sigma}\right). \tag{35}$$

Stále však zůstává otázka, jestli existují nějaké posloupnosti (jiné než $\Lambda^*$) z množiny $M^k(\sigma)$, pro které formule (34) platí pro všechny funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$, patřící do $L^1(\mathbb{R})$.

**Lemma 4.2.1.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a nechť $f, g$ jsou dvě funkce definované na $\mathbb{R}$ takové, že*

$$\frac{f^k(x)}{x^2} \in L^1(\mathbb{R})\,, \quad \frac{g^k(x)}{x^2} \in L^1(\mathbb{R})\,.$$

*Pak pro všechna přirozená čísla $a, b$ splňující $k = a + b$ platí*

$$\frac{f^a(x)g^b(x)}{x^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

*Důkaz.* Můžeme psát

$$\frac{f^k(x)}{x^2} = \left(\frac{f^a(x)}{x^{2\frac{a}{k}}}\right)^{\frac{k}{a}},$$

$$\frac{g^k(x)}{x^2} = \left(\frac{g^b(x)}{x^{2\frac{b}{k}}}\right)^{\frac{k}{b}}.$$

Vidíme, že $1 = \frac{a}{k} + \frac{b}{k}$, tedy dle Hölderovy nerovnosti je

$$\left(\frac{f^a(x)}{x^{2\frac{a}{k}}}\right)^{\frac{k}{a}} \cdot \left(\frac{g^b(x)}{x^{2\frac{b}{k}}}\right)^{\frac{k}{b}} \geq \frac{f^a(x)g^b(x)}{x^{\frac{2a+2b}{k}}} = \frac{f^a(x)g^b(x)}{x^2}\,.$$

□

**Lemma 4.2.2.** *Nechť $k$ je sudé přirozené číslo a nechť $a, b \in \mathbb{R}$ , $b \neq 0$. Pak*

$$(a+b)^k > a^k + ka^{k-1}b\,.$$

*Důkaz.* Pro $a = 0$ je nerovnost zřejmá, stejně tak pro případ, kdy $a$ i $b$ mají stejná znaménka. Pokud $a$ a $b$ mají opačná znaménka a $|a| > |b|$, pak nerovnost plyne z Bernoulliho nerovnosti. Ve všech zbývající případech je levá strana nerovnosti kladná, zatímco pravá strana nerovnosti záporná. □

**Lemma 4.2.3.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$ je liché a nechť $\Lambda \in M^k(\sigma)$ je taková posloupnost, že formule (34) platí pro všechny funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$, patřící do $L^1(\mathbb{R})$. Pokud $f$ je celistvá funkce exponenciálního typu $\sigma$ taková, že $f(0) = 0, f'(0) = 1$ a $f \neq \varphi_\Lambda$, pak*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}|\varphi_\Lambda(x)|^{k+1}\ dx < \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}|f(x)|^{k+1}\ dx\,. \tag{36}$$

*Důkaz.* Můžeme předpokládat, že pravá strana (36) je konečná, neboť v opačném případě tvrzení ihned plyne z vlastnosti (iv) množiny $M^k(\sigma)$.

Nejprve nechť $f(x)$ nabývá pro reálná $x$ reálných hodnot. Uvažme funkci

$$h(x) := f(x) - \varphi_\Lambda(x)\,.$$

Funkce $h$ je exponenciálního typu $\sigma$, $h(x) \not\equiv 0$ a

$$0 = h(0) = h'(0)\,.$$

Z Lemmatu 4.2.1 plyne, že funkce $\frac{f^a(x)\varphi_\Lambda^b(x)}{x^2}$ a $\frac{h^a(x)\varphi_\Lambda^b(x)}{x^2}$ náleží do $L^1(\mathbb{R})$ pro všechna $0 < a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a + b = k + 1$. Tedy

$$F(x) := \frac{(\varphi_\Lambda(x) + h(x))^{k+1}}{x^2} - \frac{\varphi_\Lambda^{k+1}(x)}{x^2} - \frac{(k+1)\varphi_\Lambda^k(x)h(x)}{x^2} \tag{37}$$

je celistvá funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$, reálná pro reálné $x$ a $F \in L^1(\mathbb{R})$. Z Lemmatu 4.2.2 plyne, že $F(x) > 0$ (skoro všude) a tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\mathrm{d}x > 0\,. \tag{38}$$

Funkce $\frac{\varphi_\Lambda^k(x)h(x)}{x^2}$ je také celistvá funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$. Můžeme na ni tedy aplikovat formuli (34) s posloupností $\Lambda$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}\varphi_\Lambda^k(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{39}$$

Dokazovaná nerovnost (36) teď plyne z (37)-(39).

Pokud má $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nějaké komplexní koeficienty, aplikujeme předešlou úvahu prve na

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \Re a_n z^n$$

a dále vidíme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}|\varphi_\Lambda(x)|^{k+1}\,\mathrm{d}x < \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}|g(x)|^{k+1}\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}|f(x)|^{k+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

□

**Lemma 4.2.4.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$ je liché a $\Lambda \in M^k(\sigma)$ je taková posloupnost, že formule (34) platí pro všechny funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$, patřící do $L^1(\mathbb{R})$. Pak funkce $\varphi_\Lambda$ je jednoznačně určena, dále všechny její nulové body leží v $\Lambda$.*

*Důkaz.* Jednoznačnost $\varphi_\Lambda$ plyne z Lemmatu 4.2.3. Předpokládejme, že $\lambda \in \mathbb{R}$ je nulový bod $\varphi_\Lambda$, který není obsažen v $\Lambda$. Pak

$$\tilde{\varphi}_\Lambda(z) := \frac{\lambda}{z-\lambda}\varphi_\Lambda(z)$$

též splňuje podmínky (iii) a (iv) z Definice množiny $M^k(\sigma)$. To je v rozporu s jednoznačností $\varphi_\Lambda$. □

Nyní můžeme přistoupit k hlavnímu výsledku této části, analogickému Turánově větě.

**Věta 4.2.5.**

*(i)* *Pro sudé $k \in \mathbb{N}$ neexistuje žádná posloupnost $\Lambda \in M^k(\sigma)$ a žádné $\varepsilon > 0$ tak, že formule (34) platí pro všechny funkce exponenciálního typu $k\sigma + \varepsilon$, patřící do $L^1(\mathbb{R})$.*

*(ii)* *Pro liché $k \in \mathbb{N}$ je posloupnost $\Lambda^* := \left\{n\frac{\pi}{\sigma}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jediným prvkem $M^k(\sigma)$ takovým, že formule (34) platí pro všechny funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$, patřící do $L^1(\mathbb{R})$.*

*(iii)* *Posloupnost $\Lambda^*$ je charakterizována skutečností, že funkce $\varphi_{\Lambda^*}$ minimalizuje integrál*

$$I_k(f) := \int_{-\infty}^{\infty} x^{-2}|f(x)|^{k+1}\, dx$$

*přes všechny celistvé funkce $f$ exponenciálního typu $\sigma$ takové, že*

$$f(0) = 0\,, \quad f'(0) = 1\,.$$

*Důkaz.* Nechť $k$ je sudé. Protože celistvá funkce exponenciálního typu, patřící do $L^1(\mathbb{R})$ je omezená na $\mathbb{R}$ ([5, Věta 6.7.15]), vidíme z vlastnosti (iv) Definice množiny $M^k(\sigma)$, že celistvá funkce

$$f(z) := \varphi_\Lambda^k(z)\left(\frac{\sin(\varepsilon z/4)}{z}\right)^4$$

je exponenciálního typu $k\sigma + \varepsilon$ a náleží do $L^1(\mathbb{R})$. Dále $f(x) > 0$ skoro všude na $\mathbb{R}$. Tedy pro tuto funkci je levá strana formule (34) kladná, zatímco pravá strana se rovná nule. Tím je dokázáno (i).

Pro liché $k$ nyní víme, že pro $\Lambda^*$ formule (34) platí pro všechny funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$ a $\varphi_{\Lambda^*}$ můžeme volit jako $\frac{\sin(\sigma z)}{\sigma}$. Z Lemmat 4.2.3 a 4.2.4 plyne, že $\varphi_{\Lambda^*}(z) \equiv \varphi_\Lambda(z)$ pro všechna $\Lambda \in M^k(\sigma)$, pro něž formule (34) platí pro všechny funkce exponenciálního typu $(k+1)\sigma$, patřící do $L^1(\mathbb{R})$. Tím je dokázáno (ii).

Tvrzení (iii) je přímým důsledkem Lemmatu 4.2.3 a Lemmatu 4.2.4. $\square$

# Literatura

[1] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *Characterization of functions in terms of rate of convergence of a quadrature process.* Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), s. 85-94

[2] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *Characterization of Entire Functions via Quadrature.* Complex Variables, vol. 20 (1992), s. 113-120

[3] Eric W. Weisstein, *Möbius Function.* From MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/MoebiusFunction.html

[4] P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier analysis and approximation*, vol. 1, Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1971

[5] R. P. Boas, Jr., *Entire Functions.* Academic Press, New York, 1954

[6] Q. I. Rahman, *On the coefficients of an entire series of finite order.* Math. Student 25 (1957), s. 113-121

[7] G. Pólya and N. Wiener, *On the oscillation of the derivatives of a periodic function.* Trans. Amer. Math.Soc. 52 (1942), s. 249-256

[8] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *A quadrature formula for entire functions of exponential type.* Math. Comp. 63 (1994), s. 215-227

[9] Anderson, David. *Abel-Plana Formula.* ¨From MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Abel-PlanaFormula.html

[10] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *An analogue of Turán's quadrature formula.* Constructive theory of functions, Sofia (1942), s. 405-412

[11] Q. I. Rahman and G. Schmeisser, *Quadrature formulae and functions of exponential type.* Math. Comp. 54 (1990), s. 245-270

[12] Eric W. Weisstein, *Bernoulli Number.* From MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/BernoulliNumber.html

[13] Wikipedia contributors, *Bernoulli number.* Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number

[14] Wikipedia contributors, *Fejér kernel*. Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Fejer_kernel

[15] L. Šakalov, *Uber eine allgemeine Quadraturformel*. Compter Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences 1 (1948), s. 9-12

[16] P. Turán, *On the theory of the mechanical quadrature*. Acta Scient. Math. 12 (1950), s. 30-37

[17] Q. I. Rahman, *Interpolation of Entire Functions*. American Journal of Mathematics 87 (1965), s. 1029-1076

[18] G. R. Grozev and Q. I. Rahman, *Hermite Interpolation and an Inequality for Entire Functions of Exponential Type*. Journal of Inequalities and Applications 1 (1997), s. 149-164

[19] P. Olivier and Q. I. Rahman, *Sur une formule de quadrature pour des fonctions entiéres*. Modélisation mathématique at Analyse numérique 2 (1986), s. 517-537

[20] C. Frappier and Q. I. Rahman, *Une formule de quadrature pour les fonctions entiéres de type exponentiel*. Ann. Sci. Math. Québec 10 (1986), s. 17-26

[21] Bary, N. K., *A treatise on trigonometric series*. Vol I and II, Oxford, Pergamon Press 1964

[22] Blakeley, G. R., Borosg, I., Chui, C. K., *A two-dimensional mean problem*. J. Approx. Theory 22, (1973), s. 11-26

[23] J. H.Loxton, J. W. Sanders, *The kernel of a rule of approximate integration*. J. Austral. Math. Soc. Ser. B 21 (1980), s. 257-267